Contrôle d'Analyse IV du 23 juin 2009
II année EEIGM-ENSGSI ; Enseignant : M. HABOUSSI

Durée : 3 heures
Les documents, autres que les formulaires distribués en cours, et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Nom : **Prénom :** **Gr :**

Exercice 1

Trouver les bornes supérieure et inférieure de la fonction définie par $f(x,y) = xy - y^2 - x^3$ sur le domaine compact $K = [0,1] \times [-1,1]$.

Exercice 2

Trouver un paramétrage intrinsèque de la courbe définie par $y = chx$.

Exercice 3

Soit $\omega = f(x)[(3y^2 + 2xyz + 2yz)dx + (6y + 2xz)dy + 2xydz]$ où f est une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 1$.
Trouver f pour que ω soit fermée. Déterminer dans ce cas les primitives de ω dans R^3.

Exercice4

On se place dans le plan rapporté au repère orthonormé direct (R.O.N.D.) $R = (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

1- Utiliser la formule de Green-Riemann pour montrer que

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta$$

$A(D)$ représente l'aire du secteur D du plan délimité par C, $[OA]$ et $[OB]$. C une courbe ouverte, de classe C^1 par morceaux, orientée positivement, d'origine A et d'extrémité B qui a pour équation en coordonnées polaires $\rho = \rho(\theta)$.
2- Utiliser la formule démontrée précédemment pour calculer l'aire du domaine intérieur à la lemniscate d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.

Rappel de la formule de Green-Riemann : $\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$

Exercice5

Rappel de la formule de Stokes : $\oint_C \overrightarrow{F}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}(M) \cdot \overrightarrow{n} d\sigma$.

Vérifier la formule de Stokes lorsque, dans R^3 muni du R.O.N.D. $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, $\overrightarrow{F} = (x^2y^3, 1, z)$, C est le cercle d'équations $x^2 + y^2 = R^2$ et $z = 3$, S est la demi-sphère située en dessous de $z = 3$ et s'appuyant sur C.

$r\,dr\,d\theta$

Exercice6

Rappel de la formule d'Ostrogradski : $\oint_S \overrightarrow{F}(M) \cdot \overrightarrow{n} d\sigma = \int_V div\overrightarrow{F}(M) dV$

Vérifier la formule d'Ostrogradski lorsque, dans R^3 muni du R.O.N.D. $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on a $\overrightarrow{F} = (4x, -2y^2, z^2)$, S est une surface cylindrique fermée d'axe parallèle à $\overrightarrow{e_z}$, de hauteur $H = 3$ et de section circulaire centrée en O de rayon égale à 2, et V est le volume intérieur à S.

Exercice7

Dans l'espace rapporté au R.O.N.D. $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on considère le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ et le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M) = k \left\|\overrightarrow{OM}\right\|_2^n \overrightarrow{OM}$ avec k une constante réelle non nulle.

1- Pour quelle valeur de n, le champ vectoriel $\overrightarrow{F}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? Déterminer ce potentiel dans ce cas ?

2- Pour quelle valeur de n, le champ vectoriel $\overrightarrow{F}$ dérive-t-il d'un potentiel vecteur ? Déterminer ce potentiel dans ce cas ?